## Exercice 1 (9 *points*)

*Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.*

1. On considère un entier naturel $n$ strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\mathrm{d}t = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}.$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\int_0^1 t\sin(n\pi t)\mathrm{d}t = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t \text{ sur } [0;1[ \\ f(t) = 0 \text{ sur } [1;2[ \end{cases}$$

a) En utilisant le **document réponse n°1, à rendre avec la copie**, tracer la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-4;4]$.

b) On appelle $S_f$ la série de Fourier associée à la fonction $f$.

On note $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)]$.

Calculer $a_0$.

Donner les valeurs des coefficients $a_n$ et $b_n$ et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction $f$, défini par $\mu_{eff}{}^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | |
| $b_n$ | | | |

e) Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près du nombre réel $A$ défini par :

$$A = \frac{a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}(a_n{}^2 + b_n{}^2)}{\mu_{eff}{}^2}.$$

3. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, dont la courbe représentative $C_g$ est tracée sur l'intervalle $[-4;4]$ dans le document réponse n°1.

On admet que le développement en série de Fourier $S_g$ associé à la fonction $g$, est défini par :

$$S_g(t) = S_f(-t).$$

Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$$

4. Soit $h$ et $k$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2, telles que :

$$h(t) = f(t) + g(t) \text{ et } k(t) = f(t) - g(t) \text{ pour tout nombre réel } t.$$

a) Sur le **document réponse n° 1, à rendre avec la copie**, tracer les courbes $C_h$ et $C_k$ représentatives des fonctions $h$ et $k$ sur l'intervalle $[-4;4]$.

b) On admet que les développements en série de Fourier $S_h$ et $S_k$ associés respectivement aux fonctions $h$ et $k$, sont définis par :

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \text{ et } S_k(t) = S_f(t) - S_g(t).$$

Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions $h$ et $k$.

## Exercice 2 (11 *points*)

*Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».*
*La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.*
*Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 seconde.*

On rappelle que la fonction échelon unité $U$ est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

### Partie A :

On considère la fonction causale $s_1$ telle que, pour tout nombre réel $t$ :

$$s_1(t)+\int_0^t s_1(u)\mathrm{d}u=U(t).$$

On note $S_1$ la transformée de Laplace de la fonction $s_1$.

1. Montrer que $S_1(p)=\dfrac{1}{p+1}$.
2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel $t$.

La courbe représentative de la fonction $s_1$ est donnée par la **figure 1 du document réponse n°2.**

### Partie B :

On considère la fonction causale $s_2$ telle que, pour tout nombre réel $t$ :

$$s_2(t)+\int_0^t s_2(u)\mathrm{d}u=U(t)-U(t-1).$$

On note $S_2$ la transformée de Laplace de la fonction $s_2$.

1. Représenter graphiquement la fonction $e_2$ définie sur l'ensemble des nombres réels par :
$$e_2(t)=U(t)-U(t-1).$$
2. Déterminer $S_2(p)$.
3. a) En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel $t$.

   b) Justifier que :
$$\begin{cases} s_2(t)=0 & \text{si } t<0 \\ s_2(t)=\mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0\leq t<1 \\ s_2(t)=-\,\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) & \text{si } t\geq 1 \end{cases}$$
4. Établir le sens de variation de la fonction $s_2$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
5. Calculer $s_2(1^+)-s_2(1^-)$.
6. On appelle $C_2$ la courbe représentative de la fonction $s_2$.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

| $t$ | 1 | 1,1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_2(t)$ | | | | | |

Les résultats seront donnés à $10^{-2}$ près.

b) Compléter le tracé la courbe $C_2$ sur la **figure 2 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.**

Partie C :

On considère la fonction causale $s_3$ telle que, pour tout nombre réel $t$ :

$$s_3(t)+\int_0^t s_3(u)\mathrm{d}u = U(t)-U(t-1)+U(t-1{,}1).$$

1. Soit la fonction $e_3$ définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_3(t)=U(t)-U(t-1)+U(t-1{,}1).$$

a) Montrer que $e_3(t)=e_2(t)$ pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $]-\infty;1{,}1[$.

b) Déterminer $e_3(t)$ pour $t \geq 1{,}1$.

c) Représenter graphiquement la fonction $e_3$.

Pour la suite, on admet que :

$$\begin{cases} s_3(t)=s_2(t) & \text{si } t<1{,}1 \\ s_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1{,}1}\right) & \text{si } t \geq 1{,}1. \end{cases}$$

2. Établir le sens de variation de la fonction $s_3$ sur l'intervalle $]1{,}1\,;+\infty[$.

3. Calculer $s_3\left(1{,}1^+\right)-s_3\left(1{,}1^-\right)$.

4. On appelle $C_3$ la courbe représentative de la fonction $s_3$.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

| $t$ | 1,1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|
| $s_3(t)$ | | | | |

Les résultats seront donnés à $10^{-2}$ près.

b) Compléter le tracé de la courbe $C_3$ sur la **figure 3 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.**