BTS session 2001 groupe A

Durée : 3 heures ; spécialités : Cira et Électronique ; coefficient : 2.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 - 12 points

Partie A

1. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos 2t \,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}$$

   Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2. On considère le signal, modélisé par la fonction réelle e, de période 2π , définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} e(t) = \sin t \quad \text{si} \quad t \in [0\ ,\ \pi] \\ e(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in]\pi\ ,\ 2\pi[\end{array}\right.$$

   (a) Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction e pour t variant dans l'intervalle $]-2\pi\ ,\ 4\pi[$

   (b) Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_1 et a_2 de la fonction e. On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients b_1 et b_2 valent : $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3. (a) Calculer le carré E^2 de la valeur efficace du signal e.

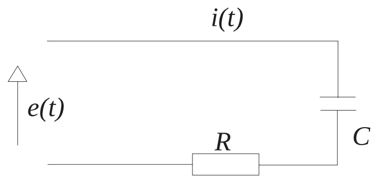
   (b) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

   Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.
   Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2\right)$.
   Calculer P, puis donner une approximation décimale à 10^{-3} près du rapport $\dfrac{P}{E^2}$.
   La comparaison de E^2 et P justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.

Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée e défini dans la partie A.



L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour $t \in [0\ ,\ +\infty[$,

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\mathrm{d}u = e(t) \qquad (1)$$

Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée e par son développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2. L'équation (1) devient alors :

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos 2t \qquad (2)$$

On admet que l'intensité i du courant est une fonction dérivable sur $[0\ ,\ +\infty[$.
On suppose dans toute la suite de l'exercice que $R = 5000\ \Omega$ et $C = 10^{-4}$ F.

1. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = \left(10^{-4}\right)\cos t + \left(\dfrac{4}{15\pi}10^{-3}\right)\sin 2t \quad (3) \\ t \in [0\ ,\ +\infty[\end{array}\right.$$

2. Vérifier que la fonction i_1, telle que $i_1(t) = \left(4 \cdot 10^{-5}\right)\cos t + \left(2 \cdot 10^{-5}\right)\sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = \left(10^{-4}\right)\cos t \\ t \in [0\ ,\ +\infty[\end{array}\right.$$

3. Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = \left(\dfrac{4}{15\pi}10^{-3}\right)\sin 2t \\ t \in [0\ ,\ +\infty[\end{array}\right.$$

4. Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.

Exercice 2 - 8 points

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Soit f l'application qui à tout point m de P d'affixe z ($z \neq -1$), associe le point M d'affixe :

$$Z = \frac{z}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+z}$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble D des points d'affixe $-\frac{3}{2} + \mathrm{i}y \quad (y \in \mathbb{R})$.
2. Soit $z_1 = z + 1$. Préciser la transformation géométrique t_1 qui associe à un point m d'affixe z, le point M_1 d'affixe z_1.
   Quelle est l'image, notée D_1, de D par la transformation t_1 ?
3. Soit t_2 la transformation géométrique qui au point d'affixe z ($z \neq 0$) associe le point M_2 d'affixe $z_2 = \frac{1}{z}$.
   Quelle est l'image, notée Γ_2, de D_l par la transformation t_2 ?
4. Soit t_3 la transformation géométrique qui au point d'affixe z associe le point M_3 d'affixe $z_3 = -z$.
   Préciser la nature de t_3. Quelle est l'image, notée Γ_3, de Γ_2 par la transformation t_3 ?
5. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $Z = 1 - \frac{1}{1+z}$ lorsque $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}y \quad (y \in \mathbb{R})$.
6. Représenter sur une même figure les ensembles successivement obtenus D, D_l, Γ_2, Γ_3 et Γ (unité graphique 2 cm).

Partie B

1. Soit $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}y \quad (y \in \mathbb{R})$. On remarque que $Z = \frac{z}{1+z}$ peut alors s'écrire $Z = \frac{3 - 2\mathrm{i}y}{1 - 2\mathrm{i}y}$.
   Montrer que Z possède un argument noté $\varphi(y)$ tel que : $\varphi(y) = \arctan 2y - \arctan\left(\frac{2}{3}y\right)$.
2. Étudier les variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ (préciser les limites aux bornes) et en déduire la valeur maximale φ_m de φ.
3. Utiliser la figure établie dans la partie A 6 pour retrouver le résultat de la question précédente.